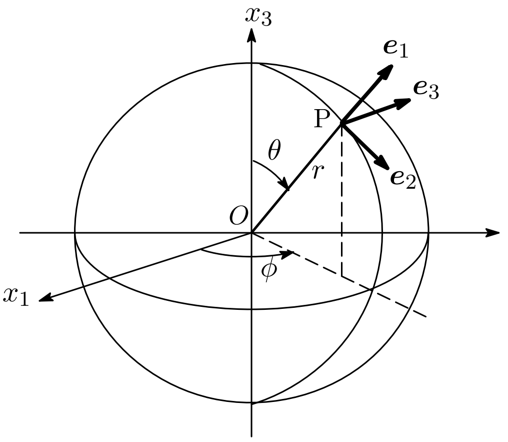
第6話　曲線座標とテンソル

6.1　曲線座標

- K氏：直交曲線座標系というのは具体的には円柱座標や極座標，楕円柱座標などのことだ．3次元空間の1点は直交直線座標系で (x_1, x_2, x_3) と表すことができ，また，曲線座標系では同じ点を (u^1, u^2, u^3) で表すことができる．早い話，お馴染みの極座標を例に挙げれば分かりやすい．

$$x_1 = x_1(r, \theta, \phi)$$
$$x_2 = x_2(r, \theta, \phi)$$
$$x_3 = x_3(r, \theta, \phi)$$

$$u^1 = u^1(x_1, x_2, x_3)$$
$$u^2 = u^2(x_1, x_2, x_3)$$
$$u^3 = x^3(x_1, x_2, x_3)$$



$$x_1 = r\sin\theta\cos\phi$$
$$x_2 = r\sin\theta\sin\phi$$
$$x_3 = r\cos\theta$$

$$u^1 = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$
$$u^2 = \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}/x_3)$$
$$u^3 = \phi = \tan^{-1}(x_2/x_1)$$

そして，$\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (u^1, u^2, u^3)$ の対応が1対1であるための必要十分条件は関数行列式（ヤコビアン）がゼロでないことだった．

$$\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}\right) \equiv \frac{\partial(u^1, u^2, u^3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u^1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u^3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u^3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u^3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6.1.1}$$

このとき，直交座標 $\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3)$ は (u^1, u^2, u^3) の関数として

$$x_1 = x_1(u^1, u^2, u^3), \quad x_2 = x_2(u^1, u^2, u^3), \quad x_3 = x_3(u^1, u^2, u^3) \tag{6.1.2}$$

と表すことができる．逆に，$\mathrm{P}(u^1, u^2, u^3) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3)$ の対応が1対1であるための必要十分条件は

$$J = \det\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial u^i}\right) \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u^3} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u^3} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6.1.3}$$

で，このとき $\mathrm{P}(u^1, u^2, u^3)$ は直交座標 (x_1, x_2, x_3) の関数として

$$u^1 = u^1(x_1, x_2, x_3) \quad u^2 = u^2(x_1, x_2, x_3), \quad u^3 = u^3(x_1, x_2, x_3) \tag{6.1.4}$$

と表すことができる．

- エミリー：関数行列式は多重積分の場合にでてくるわね．例えば

$$\iiint f(x, y, z)dxdydz = \iiint f(x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi))\,|J|\,drd\theta d\phi \tag{6.1.5}$$

$|J|$ は関数行列式で

$$|J| = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta \tag{6.1.6}$$

だった．

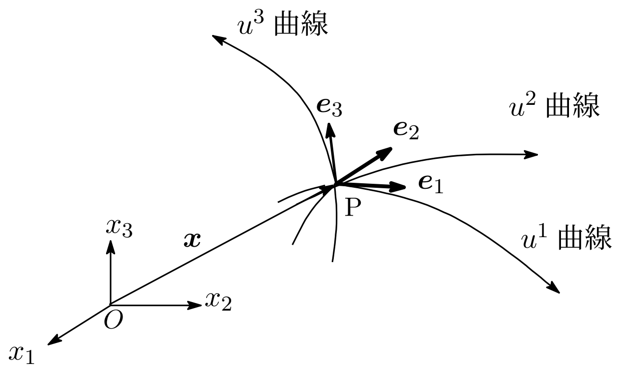
- K氏：そうだね．極座標の場合，$r > 0, \theta \neq 0, \pi$ でないと $|J| = 0$ となるので，極座標は空間から x_3 軸を除いた領域で定義されることになる．というのは原点 $r = 0$ では θ と ϕ が定まらないし，x_3 軸上の点では ϕ が一意的に定まらないという訳だね．

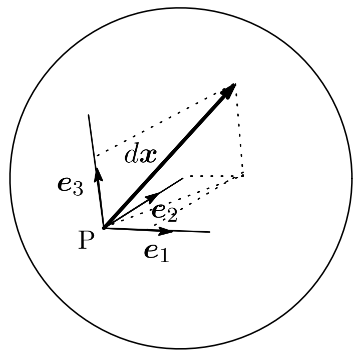
6.1.1 自然基底

- K氏：曲線座標のイメージが大体つかめたと思うので，この座標系における基底を決めていこう．曲線座標なので基底は固定したものではなく位置によって変化する．空間のある 1 点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3)$ とすると

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^1}, \frac{\partial x_2}{\partial u^1}, \frac{\partial x_3}{\partial u^1}\right), \quad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^2}, \frac{\partial x_2}{\partial u^2}, \frac{\partial x_3}{\partial u^2}\right), \quad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^3} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^3}, \frac{\partial x_2}{\partial u^3}, \frac{\partial x_3}{\partial u^3}\right) \tag{6.1.7}$$

これらの量は P 点の u^1, u^2, u^3 座標をそれぞれ別個に動かした場合の，それぞれの方向への単位移動距離に対する 1 次独立なベクトルだ．図中の u^1, u^2, u^3 曲線というのは各曲線座標軸に平行な無数の曲線の 1 つと考えればいい．





(6.1.7) を点 P における自然基底 $\boldsymbol{e}_i$ と定義しよう．自然基底は自然標構とも呼ばれる．$\boldsymbol{e}_i$ を列ベクトルで表すと

$$\boldsymbol{e}_1 \equiv \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u^1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 \equiv \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u^2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 \equiv \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^3} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u^3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u^3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{pmatrix} \tag{6.1.8}$$

いま，自然基底は互いに直交しているとは限らないとしておく．自然基底を使うと

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{x} &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2}du^2 \\
&= du^1\boldsymbol{e}_1 + du^2\boldsymbol{e}_2 + du^2\boldsymbol{e}_3 \\
&= du^i\boldsymbol{e}_i
\end{aligned} \tag{6.1.9}
$$

と表すことができる．ちなみに極座標（←直交曲線座標）での自然基底は

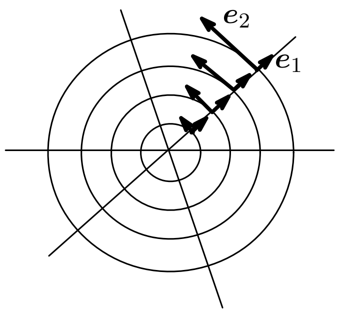
$$
\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.1.10}
$$

となる..

- エミリー：極座標での自然基底は $u^1 = r$, $u^2 = \theta$, $u^3 = \phi$ として

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial u^1} = \sin\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u^1} = \sin\theta\sin\phi, \quad \frac{\partial x_3}{\partial u^1} = \cos\theta \\
&\frac{\partial x_1}{\partial u^2} = r\cos\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u^2} = r\cos\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial x_3}{\partial u^2} = -r\sin\theta \\
&\frac{\partial x_1}{\partial u^3} = -r\sin\theta\sin\phi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u^3} = r\sin\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial x_3}{\partial u^3} = 0
\end{aligned}
$$

で確かにそうなるわね．各基底ベクトルの長さは $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = r$, $|\boldsymbol{e}_3| = r\,|\sin\theta|$ で，空間の場所によって変化している．2 次元極座標の場合は次の図のようになるわね．



- K氏：そうだね，基底ベクトルの長さはその座標軸のスケール単位だった．

6.2 ベクトル場・テンソル場・スカラー場

6.2.1 ベクトル場

- K氏：自然基底が決まったので空間に分布するベクトルを捉えることができる．ベクトル場を $\boldsymbol{v}$ とすると

$$
\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{e}_2 + v^3\boldsymbol{e}_3 \tag{6.2.1}
$$

としたとき，ベクトル成分 (v^1, v^2, v^3) を曲線座標系 (u^1, u^2, u^3) に関する反変成分という．また，

$$
v_1 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_1, \quad v_2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_2, \quad v_3 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_3 \tag{6.2.2}
$$

をベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の共変成分という．この定義は (5.1.6) でもやったね．

- エミリー：そうね．この反変成分，共変成分はそれぞれの座標変換則に従うということをハッキリさせておく必要があるわね．

- K氏：うん，そうだね．曲線座標 (u^1, u^2, u^3) と (u'^1, u'^2, u'^3) の間の関係を

$$u'^1 = u'^1(u^1, u^2, u^3), \quad u'^2 = u'^2(u^1, u^2, u^3) \quad u'^3 = u'^3(u^1, u^2, u^3) \tag{6.2.3}$$

としよう．そうすると合成関数の微分法により

$$\frac{\partial x_i}{\partial u'^j} = \frac{\partial u^k}{\partial u'^j}\frac{\partial x_i}{\partial u^k} \tag{6.2.4}$$

となる．曲線座標 (u^i) と (u'^i) の自然基底をそれぞれ $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}'_i$ とすると

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u^i} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u^i} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u^i} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}'_i = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u'^i} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u'^i} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u'^i} \end{pmatrix} \tag{6.2.5}$$

なので，(6.2.4) を使えば，自然基底の座標変換式として

$$\boldsymbol{e}'_i = \frac{\partial u^k}{\partial u'^i}\boldsymbol{e}_k = a^k{}_i\boldsymbol{e}_k \qquad \left(a^k{}_i = \frac{\partial u^k}{\partial u'^i}\right) \tag{6.2.6}$$

を得る．あるいは逆に

$$\boldsymbol{e}_k = \frac{\partial u'^i}{\partial u'^k}\boldsymbol{e}'_i = b^i{}_k\boldsymbol{e}'_i \qquad \left(b^i{}_k = \frac{\partial u'^i}{\partial u^k}\right) \tag{6.2.7}$$

を得る．$b^i{}_k$ は $a^k{}_i$ の逆行列で次式を満たす．

$$a^k{}_i b^i{}_j = \delta^k_j, \quad b^k{}_i a^i{}_j = \delta^k_j \tag{6.2.8}$$

さて，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の曲線座標 u'^i の関する成分を v'^i とすると

$$\boldsymbol{v} = v'^1\boldsymbol{e}'_1 + v'^2\boldsymbol{e}'_2 + v'^3\boldsymbol{e}'_3 = v'^i\boldsymbol{e}'_i \tag{6.2.9}$$

と表せるね．(6.2.1) に (6.2.7) を入れると

$$\boldsymbol{v} = b^i{}_k v^k \boldsymbol{e}'_i \tag{6.2.10}$$

を得るが，これと (6.2.9) を比較すれば

$$v'^i = b^i{}_k v^k \tag{6.2.11}$$

で，v^i は座標変換に際して反変ベクトル成分として変換を受ける．また，ベクトル成分 v_i

$$v'_i = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}'_i = a^k{}_i\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_k = a^k{}_i v_k \tag{6.2.12}$$

と座標変換する．これは共変成分の変換則だ．

- エミリー：ナルホド，これで (v^1, v^2, v^3), (v_1, v_2, v_3) が曲線座標 (u^1, u^2, u^3) に関する反変成分，共変成分であるということがハッキリしたわ．

6.2.2　テンソル場

- K氏：2 階テンソル場 T についてもいままでと同様に混合成分，共変成分，反変成分などが定義さて，それぞれ座標変換で次のように変換される．

$$\begin{cases} \cdot\ \text{混合成分} \ : \ T'^{j}{}_{i} = b^{j}{}_{\nu} a^{\mu}{}_{i} T^{\nu}{}_{\mu} \\ \cdot\ \text{共変成分} \ : \ T'_{ij} = a^{\mu}{}_{i} a^{\nu}{}_{j} T_{\mu\nu} \\ \cdot\ \text{反変成分} \ : \ T^{ij\prime} = b^{i}{}_{\mu} b^{j}{}_{\nu} T^{\mu\nu} \end{cases} \tag{6.2.13}$$

  ただし，変換係数は (6.2.6)，(6.2.7) だね．

- エミリー：曲線座標も P 点近傍では既に学習した直線斜交座標と見做せるので，斜交座標の議論がそのまま適用できるというわけね．

- K氏：うん，ただベクトル場やテンソル場の成分が一般に曲線座標の関数になるということが曲線座標の特長だね．

6.2.3　スカラー場

- K氏：スカラー場を $\varphi(u^i)$ とすると，これは座標変換しても変わらない量だから

$$\varphi'(u'^i) = \varphi(u^i) \tag{6.2.14}$$

  この両辺を u'^i で偏微分すると

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial u'^i} = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}\frac{\partial \varphi}{\partial u^j} = a^j{}_i \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \qquad \left(v_i = a^j{}_j v_j\right) \tag{6.2.15}$$

  これはベクトルの共変成分の変換則だね．つまり，$\dfrac{\partial \varphi}{\partial u^j}(\equiv v_j)$ は共変ベクトル場を形成するということだね．

- エミリー：スカラー場の勾配はベクトル場になったわね．$v_j = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^j}$ はベクトルの共変成分ね．そうすると反変成分は

$$v^i = g^{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \tag{6.2.16}$$

  となるのね．

6.3　計量テンソル

- K氏：計量テンソルは既に何度も登場したが，ここでもまた再登場させよう．近接した 2 点間の距離を ds とすると，その 2 乗は (6.1.10) より

$$ds^2 = d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} = du^i \boldsymbol{e}_i \cdot du^j \boldsymbol{e}_j = g_{ij} du^i du^j \tag{6.3.1}$$

  となる．ds^2 を曲線座標系 (u^1, u^2, u^3) の線素という．g_{ij} は今まで何度も登場したが，曲線座標系では次のようになる．

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \frac{\partial x_k}{\partial u^i}\frac{\partial x_k}{\partial u^j}, \quad g_{ij} = g_{ji} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{6.3.2}$$

g_{ij} は

$$g'_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = a^k{}_i \boldsymbol{e}_k \cdot a^\ell{}_j \boldsymbol{e}_\ell = a^k{}_i a^\ell{}_j \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_\ell = a^k{}_i a^\ell{}_j g_{k\ell} \tag{6.3.3}$$

と変換される計量テンソルの共変成分だね．反変成分は

$$g^{ij\prime} = b^i{}_k b^j{}_\ell g^{k\ell} \tag{6.3.4}$$

で

$$g_{ik}\, g^{jk} = \delta_i^j \tag{6.3.5}$$

が成り立つ．

最後に g_{ij} の行列式を考えよう．2 つの行列の積の行列式は各行列式の積に等しいので

$$|g_{ij}| = \left|\frac{\partial x_k}{\partial u^i}\frac{\partial x_k}{\partial u^j}\right| = \left|\frac{\partial x_k}{\partial u^i}\right|\left|\frac{\partial x_k}{\partial u^j}\right| = J^2 \tag{6.3.6}$$

が成り立つ．J はヤコビアンだ．$g = |d_{ij}|$ とおけば

$$J = \sqrt{g} \tag{6.3.7}$$

が得られる．

6.4 共変微分

6.4.1 クリストッフェルの記号

- K氏：自然基底 $\boldsymbol{e}_i$ を $\boldsymbol{e}_j$ の方向へわずかに動かす，つまり方向微分だね．(4.2.17) より

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_j} \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u^j} \tag{6.4.1}$$

これは新しいベクトルになるので自然基底の 1 次結合で表して

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u^j} = \Gamma^1{}_{ji}\boldsymbol{e}_1 + \Gamma^2{}_{ji}\boldsymbol{e}_2 + \Gamma^3{}_{ji}\boldsymbol{e}_3 = \Gamma^k{}_{ji}\boldsymbol{e}_k \tag{6.4.2}$$

とおこう．これは $\boldsymbol{e}_i$ が u^j の方向に微小変化したとき，$\boldsymbol{e}_1$ の方向に $\Gamma^1{}_{ij}$，$\boldsymbol{e}_2$ の方向に $\Gamma^2{}_{ij}$，$\boldsymbol{e}_3$ の方向に $\Gamma^3{}_{ij}$ という成分を持つベクトルになるということだね．$\Gamma^k{}_{ji}$ をクリストッフェルの記号と呼び，

$$\Gamma^k{}_{ji} = \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\} \tag{6.4.3}$$

とも表す．クリストッフェルの記号は一見テンソルのように見えるが，あとで明らかになるようにテンソルではない．以下，この記号の中身を求めていこう．$\boldsymbol{e}_i$ の直交座標系 (x_1, x_2, x_3) に関する成分は (6.1.8) で与えられているので，$\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u^j}$ の直交座標系に関する成分は

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_j} \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u^j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u^j \partial u^i} \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial u^j \partial u^i} \\ \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial u^j \partial u^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u^i \partial u^j} \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial u^i \partial u^j} \\ \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial u^i \partial u^j} \end{pmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial u^i} = \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \boldsymbol{e}_j \tag{6.4.4}$$

となるので，

$$\Gamma^k{}_{ji} = \Gamma^k{}_{ij} \tag{6.4.5}$$

であることが分かる．次に，$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ を微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} &= \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u^\ell} \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial u^\ell} \\ &= (\Gamma^k{}_{\ell i}\boldsymbol{e}_k) \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot (\Gamma^k{}_{\ell j}\boldsymbol{e}_k) \\ &= \Gamma^k{}_{\ell i} g_{kj} + \Gamma^k{}_{\ell j} g_{ki} = \mathtt{A+B}\end{aligned} \tag{6.4.6}$$

ここで添え字を $i \to j \to \ell \to i$ と順に変えたものを作ると

$$\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} = \Gamma^k{}_{ij} g_{k\ell} + \Gamma^k{}_{i\ell} g_{kj} = \mathtt{C+A} \tag{6.4.7}$$

$$\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} = \Gamma^k{}_{j\ell} g_{ki} + \Gamma^k{}_{ji} g_{k\ell} = \mathtt{B+C} \tag{6.4.8}$$

となる．そこで (6.4.6)+(6.4.7)-(6.4.8) を計算すると

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} = 2\Gamma^k{}_{\ell i} g_{kj} \tag{6.4.9}$$

両辺を 2 で割って，両辺に g^{jh} を掛けて $j = 1, 2, 3$ について和（縮約）をとり，$g^{jh} g_{kj} = \delta^h_k$ を利用すれば

$$\Gamma^h{}_{\ell i} = \frac{1}{2} g^{jh} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} \right) \tag{6.4.10}$$

が得られる．

詳細は省くが，双対基底（反変基底）の位置変化もクリストッフェル記号を使って

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_j} \boldsymbol{e}^i = \frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial u^j} = -\Gamma^k{}_{ji} \boldsymbol{e}^k \tag{6.4.11}$$

と求めることができる．

- エミリー：直交座標系や斜交座標系では基底は位置によって変化しなかった，つまり g_{ij} は定数だったので $\Gamma^h{}_{\ell i} = 0$．クリストッフェルの記号は空間の曲がり具合を反映しているのね．
- K氏：うん，クリストッフェルの記号が恒等的に 0 であれば，その曲線座標系は直線直交座標系か斜交座標系のいずれかだということだね．

■クリストッフェル記号の座標変換

- K氏：(6.2.6) より

$$\boldsymbol{e}'_i = \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \boldsymbol{e}_k \tag{6.4.12}$$

両辺に $\dfrac{\partial}{\partial u'^j} = \dfrac{\partial u^m}{\partial u'^j} \dfrac{\partial}{\partial u^m}$ を作用させると

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}'_i}{\partial u'^j} = \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial}{\partial u^m} \left(\frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \boldsymbol{e}_k \right) = \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial u^m} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial u'^j \partial u'^i} \boldsymbol{e}_k \tag{6.4.13}$$

となる．(6.4.2) より

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}'_i}{\partial u'^j} = \left\{\begin{matrix} k \\ ji \end{matrix}\right\}' \boldsymbol{e}'_k = \left\{\begin{matrix} k \\ ji \end{matrix}\right\}' \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^k}\boldsymbol{e}_\ell, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u^j} = \left\{\begin{matrix} r \\ ji \end{matrix}\right\}\boldsymbol{e}_r \tag{6.4.14}$$

これを (6.4.13) に入れると

$$\begin{aligned} \left\{\begin{matrix} k \\ ji \end{matrix}\right\}' \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^k}\boldsymbol{e}_\ell &= \left(\frac{\partial u^m}{\partial u'^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^i}\left\{\begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix}\right\} + \frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^j \partial u'^i}\right)\boldsymbol{e}_\ell \\ \therefore \quad \left\{\begin{matrix} k \\ ji \end{matrix}\right\}' \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^k} &= \frac{\partial u^m}{\partial u'^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^i}\left\{\begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix}\right\} + \frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^j \partial u'^i} \end{aligned} \tag{6.4.15}$$

この両辺に $\dfrac{\partial u'^r}{\partial u^\ell}$ を作用させ，$r = 1, 2, 3$ について和をとり，$\dfrac{\partial u^\ell}{\partial u'^k}\dfrac{\partial u'^r}{\partial u^\ell} = \delta^r_k$ を利用すると

$$\left\{\begin{matrix} r \\ ji \end{matrix}\right\}' = \frac{\partial u'^r}{\partial u^\ell}\left(\frac{\partial u^m}{\partial u'^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^i}\left\{\begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix}\right\} + \frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^j \partial u'^i}\right) \tag{6.4.16}$$

クリストッフェル記号の座標変換は右辺第 2 式に 2 次の偏導関数を含んでいる．この項は常に 0 になるとは限らないのでテンソルとして変換しない．つまり，クリストッフェル記号はテンソルではないことになる．

6.4.2 スカラー場の共変微分

- K氏：スカラー場を $\varphi(u^i)$ とすると，これは座標変換しても変わらないので $f'(u'^i) = f(u^i)$ である．この両辺を u'^i について偏微分すれば

$$\frac{\partial f'}{\partial u'^i} = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}\frac{\partial f}{\partial u^j} \tag{6.4.17}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial u^j}$ はベクトルの共変成分なので

$$\nabla_j \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \tag{6.4.18}$$

とおこう．共変成分 $\nabla_j \varphi$ をスカラー場 φ の共変微分係数という．またスカラー場の全微分をとると

$$d\varphi' = d\varphi \tag{6.4.19}$$

で $d\varphi$ はスカラーだ．これを

$$\delta\varphi = d\varphi \tag{6.4.20}$$

とおいて，$\delta\varphi$ をスカラー場 φ の共変微分という．$\delta\varphi$ と $\nabla_j \varphi$ の間には

$$\delta\varphi = du^i\,\nabla_i \varphi \tag{6.4.21}$$

が成立する．

- エミリー：共変微分といっても結局，全微分と同じじゃないの？ 全微分と区別する理由が分からないわ．

- K氏：スカラー場では確かに共変微分と全微分との違いは明確じゃないというか，全微分と同じ結果を与えるね．この違いはベクトル場に行けばハッキリしてくるので，次にベクトル場の共変微分の話をしよう．

6.4.3 ベクトル場の共変微分

■反変ベクトル成分の共変微分

- K氏：ベクトルの反変成分 v^i は座標変換で

$$v'^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^\ell} v^\ell \tag{6.4.22}$$

と変換される．これから

$$\frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} v'^i = v^\ell \tag{6.4.23}$$

両辺を u'^j で微分すると

$$\frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i}\frac{\partial v'^i}{\partial u'^j} + \frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^j \partial u'^i} v'^i = \frac{\partial u^m}{\partial u'^j}\frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} \tag{6.4.24}$$

(6.4.16) より

$$\frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^j \partial u'^i} = \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r}\begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix}' - \frac{\partial u^m}{\partial u'^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^i}\begin{Bmatrix} \ell \\ mk \end{Bmatrix} \tag{6.4.25}$$

を上式に入れると

$$\frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r}\frac{\partial v'^r}{\partial u'^j} + \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r}\begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix}' v'^i - \frac{\partial u^m}{\partial u'^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^i}\begin{Bmatrix} \ell \\ mk \end{Bmatrix} v'^i = \frac{\partial u^m}{\partial u'^j}\frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} \tag{6.4.26}$$

となる．ここで後の計算の見通しを良くするために左辺第 1 式の添え字，これは単なる添え字なので，i を r に書き換えていることに注意．この式を整理して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r}\left(\frac{\partial v'^r}{\partial u'^j} + \begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix}' v'^i\right) &= \frac{\partial u^m}{\partial u'^j}\left(\frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} + \frac{\partial u^k}{\partial u'^i}\begin{Bmatrix} \ell \\ mk \end{Bmatrix} v'^i\right) \\
&= \frac{\partial u^m}{\partial u'^j}\left(\frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} + \begin{Bmatrix} \ell \\ mk \end{Bmatrix} v^k\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \frac{\partial v'^r}{\partial u'^j} + \begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix}' v'^i &= \frac{\partial u'^r}{\partial u^\ell}\frac{\partial u^m}{\partial u'^j}\left(\frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} + \begin{Bmatrix} \ell \\ mk \end{Bmatrix} v^k\right) \\
&= b^r{}_\ell a^m{}_j\left(\frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} + \begin{Bmatrix} \ell \\ mk \end{Bmatrix} v^k\right)
\end{aligned} \tag{6.4.27}$$

ただし，

$$b^r{}_\ell = \frac{\partial u'^r}{\partial u^\ell}, \quad a^m{}_j = \frac{\partial u^m}{\partial u'^j}$$

ここで

$$\nabla_j v^r = \frac{\partial v^r}{\partial u^j} + \begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix} v^i = T^r{}_j \tag{6.4.28}$$

とおくと[1]，(6.4.27) は

$$T^{r'}_j = b^r{}_\ell a^m{}_j T^\ell{}_m \tag{6.4.29}$$

となる．この変換式に従うのは 2 階混合テンソルの成分だった．つまり，$\nabla_j v^r$ は 2 階混合テンソルの成分であることが分かる．このテンソルをベクトルの反変成分 v^r の共変微分係数という．

[1] ; の後の記号の微分を含むことを意味して，$T^i{}_{;j}$ という添え字の付け方も共変微分でよく使われる．

そして共変微分係数を求めることを“ 共変微分する ”という．

$\nabla_j v^r$ に du^j を掛け j について縮約したものを

$$\delta v^r = du^j \nabla_j v^r \tag{6.4.30}$$

とおき，これをベクトルの反変成分 v^r の共変微分という．

- エミリー：ベクトル $\boldsymbol{v}$ の全微分は

$$d\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial u^3} du^3 = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial u^j} du^j$$

なので反変成分 v^r の全微分は

$$dv^r = \frac{\partial v^r}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial v^r}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial v^r}{\partial u^3} du^3 = \frac{\partial v^r}{\partial u^j} du^j = du^j \nabla_j v^r \tag{6.4.31}$$

となるわけだけど，これと (6.4.28) を較べると ${\Gamma^r}_{ji} v^i$ の分，$\nabla_j v^r$ の中身が違っているわね．

- K氏：そうなんだ．空間が曲がっていない場合は ${\Gamma^r}_{ji} = 0$ だったので両者の差はなかったけど，座標軸が曲がっている曲線座標の場合には微小移動に対して座標系自身も変化（自然基底が変化）するので，その変化分も併せて考慮しなければならない．この辺りの事情がテンソル量として表れているんだね．

- エミリー：共変微分というネーミングはどこから来ているのかしら．いまベクトルの反変成分の「共変」微分を学習したわけだけど．

- K氏：これは共変形式の「共変」というところかきているんだ．物理の方程式が座標変換でその形を変えない（言い方を変えると「共に変わる」）のがもっとも汎用性のある方程式というか，そのような方程式を見つけるべく努力しているわけだね．このような形式を共変形式といっている．ここでやった微分も座標変換前後で $\delta v'^r = \delta v^\ell$ となり，形式は変わらない微分となっているだろう．この意味で「共変」微分と呼んでいるんだね．

■共変ベクトル成分の共変微分

- K氏：さて，次にベクトルの共変成分の共変微分を調べていこう．ベクトルの共変成分 v_i は座標変換で

$$v'_i = \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} v_\ell, \quad v_\ell = \frac{\partial u'^i}{\partial u^\ell} v'_i \tag{6.4.32}$$

と変換される．両辺を u'^j で微分すると

$$\frac{\partial v'_i}{\partial u'^j} = \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial v_\ell}{\partial u^m} + \frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^i \partial u'^j} v_\ell \tag{6.4.33}$$

これに (6.4.25) を入れると

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_i}{\partial u'^j} &= \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial v_\ell}{\partial u^m} + \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r} \begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix}' v_\ell - \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \begin{Bmatrix} \ell \\ mk \end{Bmatrix} v_\ell \\ \therefore \quad \frac{\partial v'_i}{\partial u'^j} - \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r} \begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix}' v_\ell &= \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \left(\frac{\partial v_\ell}{\partial u^m} - \begin{Bmatrix} n \\ m\ell \end{Bmatrix} v_n \right) \end{aligned} \tag{6.4.34}$$

ここで

$$\frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r}\begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix}' v_\ell = \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r}\begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix}\frac{\partial u'^r}{\partial u^\ell} v'_r = \begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix} v'_r$$

となるので，最終的に

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_i}{\partial u'^j} - \begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix}' v'_r &= \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i}\frac{\partial u^m}{\partial u'^j}\left(\frac{\partial v_\ell}{\partial u^m} - \begin{Bmatrix} n \\ m\ell \end{Bmatrix} v_n\right) \\ &= a^\ell{}_i a^m{}_j \left(\frac{\partial v_\ell}{\partial u^m} - \begin{Bmatrix} n \\ m\ell \end{Bmatrix} v_n\right) \end{aligned} \tag{6.4.35}$$

となる．ここで

$$\nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial u^j} - \begin{Bmatrix} r \\ ji \end{Bmatrix} v_r = T_{ij} \tag{6.4.36}$$

とおけば,

$$T'_{ij} = a^\ell{}_i a^m{}_j T_{\ell m} \tag{6.4.37}$$

となり，これは2階テンソルの共変成分の変換式だ．このテンソルをベクトルの共変成分の共変微分係数という．

$$\delta v_i = du^j \nabla_j v_i \tag{6.4.38}$$

をベクトルの共変成分 v_i の共変微分という．

6.4.4　テンソル場の共変微分

■ 2 階反変テンソル成分の共変微分

- K氏：2階反変テンソルは座標変換で

$$T'^{\mu\lambda} = \frac{\partial u'^\alpha}{\partial u^\beta}\frac{\partial u'^\lambda}{\partial u^\alpha} T^{\beta\alpha} \tag{6.4.39}$$

と変換された．これを書き換えて

$$\frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda} T'^{\mu\lambda} = T^{\beta\alpha} \tag{6.4.40}$$

両辺を u^ν で微分すると

$$\frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda}\frac{\partial T'^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + \frac{\partial^2 u^\beta}{\partial u'^\nu \partial u'^\mu}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda} T'^{\mu\lambda} + \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u'^\nu \partial u'^\lambda} T'^{\mu\lambda} = \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\nu}\frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma} \tag{6.4.41}$$

(6.4.25) の添え字を書き換えて

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^\beta}{\partial u'^\nu \partial u'^\rho} &= \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu}\begin{Bmatrix} \mu \\ \nu\rho \end{Bmatrix}' - \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\nu}\frac{\partial u^\omega}{\partial u'^\rho}\begin{Bmatrix} \beta \\ \gamma\omega \end{Bmatrix} \\ \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u'^\nu \partial u'^\rho} &= \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda}\begin{Bmatrix} \lambda \\ \nu\rho \end{Bmatrix}' - \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\nu}\frac{\partial u^\omega}{\partial u'^\rho}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \gamma\omega \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{6.4.42}$$

(6.4.41) の左辺第 2 項と第 3 項は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^\beta}{\partial u'^\nu \partial u'^\rho}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda}T'^{\rho\lambda} &= \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda}\left\{\begin{matrix}\mu\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}' T'^{\rho\lambda} - \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\nu}\frac{\partial u^\omega}{\partial u'^\rho}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda}\left\{\begin{matrix}\beta\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T'^{\rho\lambda}\\ \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u'^\nu \partial u'^\rho}T'^{\mu\rho} &= \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda}\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}' T'^{\mu\rho} - \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\nu}\frac{\partial u^\omega}{\partial u'^\rho}\frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T'^{\mu\rho}\end{aligned} \tag{6.4.43}$$

となる．いま

$$\mathtt{A} = \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu}, \quad \mathtt{B} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda}, \quad \mathtt{C} = \frac{\partial u^r}{\partial u'^\nu}, \quad \mathtt{D} = \frac{\partial u^\omega}{\partial u'^\rho}$$

とおくと (6.4.41) は

$$\mathtt{AB}\frac{\partial T'^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + \mathtt{AB}\left\{\begin{matrix}\mu\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}' T'^{\rho\lambda} - \mathtt{CDB}\left\{\begin{matrix}\beta\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T'^{\rho\lambda} + \mathtt{AB}\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}' T'^{\mu\rho} - \mathtt{CD}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T'^{\mu\rho} = \mathtt{C}\frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^r}$$

両辺を AB で割ると

$$\frac{\partial T'^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + \left\{\begin{matrix}\mu\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}' T'^{\rho\lambda} - (\mathtt{CD/A})\left\{\begin{matrix}\beta\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T'^{\rho\lambda} + \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}' T'^{\mu\rho} - (\mathtt{CD/B})\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T'^{\mu\rho} = (\mathtt{C/AB})\frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^r}$$

整理して

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T'^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}' T'^{\mu\rho} + \left\{\begin{matrix}\mu\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}' T'^{\rho\lambda}\\ &= (\mathtt{CD/A})\left\{\begin{matrix}\beta\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T'^{\rho\lambda} + (\mathtt{CD/B})\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T'^{\mu\rho} + (\mathtt{C/AB})\frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^r}\\ &= \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\nu}\frac{\partial u'^\mu}{\partial u^\beta}\frac{\partial u'^\lambda}{\partial u^\alpha}\left(\left\{\begin{matrix}\beta\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}\frac{\partial u^\omega}{\partial u'^\rho}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda}T'^{\rho\lambda} + \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}\frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu}\frac{\partial u^\omega}{\partial u'^\rho}T'^{\mu\rho} + \frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma}\right)\\ &= \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\nu}\frac{\partial u'^\mu}{\partial u^\beta}\frac{\partial u'^\lambda}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma} + \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T^{\beta\omega} + \left\{\begin{matrix}\beta\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T^{\omega\alpha}\right)\end{aligned} \tag{6.4.44}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T'^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}' T'^{\mu\rho} + \left\{\begin{matrix}\mu\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}' T'^{\rho\lambda}\\ &= \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\nu}\frac{\partial u'^\mu}{\partial u^\beta}\frac{\partial u'^\lambda}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^r} + \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T^{\beta\omega} + \left\{\begin{matrix}\beta\\ \gamma\omega\end{matrix}\right\}T^{\omega\alpha}\right)\end{aligned} \tag{6.4.45}$$

ここで

$$\nabla_\nu T^{\mu\lambda} = \frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}T^{\mu\rho} + \left\{\begin{matrix}\mu\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}T^{\rho\lambda} \tag{6.4.46}$$

とおくと，(6.4.45) は 2 階反変，1 階共変混合テンソルの座標変換式になっていることが分かる．このテンソルを $T^{\mu\lambda}$ の共変微分係数という．また，

$$\delta T^{\mu\lambda} = du^\nu \nabla_\nu T^{\mu\lambda} \tag{6.4.47}$$

とおけば，$\delta T^{\mu\lambda}$ は 2 階反変テンソルで

$$\delta T^{\mu\lambda} = dT^{\mu\lambda} + \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}du^\nu T^{\mu\rho} + \left\{\begin{matrix}\mu\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}du^\nu T^{\rho\lambda} \tag{6.4.48}$$

これをテンソル $T^{\mu\lambda}$ の共変微分という．

■ **2 階共変テンソル，混合テンソル成分の共変微分**

- K 氏：同様にして 2 階共変テンソル $T_{\mu\lambda}$，混合テンソル $T^{\lambda}{}_{\nu}$ の共変微分係数と共変微分は次のようになる．

$$
\begin{cases}
\cdot\,2\text{階共変テンソル} & \nabla_\nu T_{\mu\lambda} = \dfrac{\partial T_{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} T_{\mu\rho} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} T_{\rho\lambda} \\
& \delta T_{\mu\lambda} = du^\nu \nabla_\nu T_{\mu\lambda} = dT_{\mu\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} du^\nu T_{\mu\rho} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} du^\nu T_{\rho\lambda} \\
\cdot\,2\text{階混合テンソル} & \nabla_\nu T^{\lambda}{}_{\mu} = \dfrac{\partial T^{\lambda}{}_{\mu}}{\partial u^\nu} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} T^{\rho}{}_{\mu} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} T^{\lambda}{}_{\rho} \\
& \delta T^{\lambda}{}_{\mu} = du^\nu \nabla_\nu T^{\lambda}{}_{\mu} = dT^{\lambda}{}_{\mu} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} du^\nu T^{\rho}{}_{\mu} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} du^\nu T^{\lambda}{}_{\rho}
\end{cases}
\tag{6.4.49}
$$

ここで，$\nabla_\nu T_{\mu\lambda}$ は 3 階共変テンソルの成分，$\delta T_{\mu\lambda}$ は 2 階共変テンソルの成分で，$\nabla_\nu T^{\lambda}{}_{\mu}$ は 1 階反変，2 階共変テンソルの成分，$\delta T^{\lambda}{}_{\mu}$ は 2 階の混合テンソルの成分である．

　高階テンソルの共変微分係数，共変微分も同様に求めていくことができるが，ここでは省略する．詳細が知りたければ適当な微分幾何学のテキストを参照されたし．

- エミリー：ゴタゴタした計算が続いて少し食傷気味になったけど，要するに共変微分するというのは，例えば u^j 方向にわずかに動かしたときの“ 場 ”の変化を求めているのね．座標軸自身が曲がっているので，その曲がりの影響が微分量の中に現われてくるということね．

- K 氏：そうだね．今までの得られた結果を整理しておくと次のようになる．$\partial_j = \partial/\partial u^j$ として

●ベクトル場 v を共変微分すると

$$
\begin{cases}
\text{反変成分} \quad \nabla_j v^r = \partial_j v^r + \Gamma^r_{ji} v^i \quad (2\text{階混合テンソルの成分}) \\
\text{共変成分} \quad \nabla_j v_i = \partial_j v_i - \Gamma^r_{ji} v_r \quad (2\text{階共変テンソルの成分})
\end{cases}
\tag{6.4.50}
$$

● 2 階テンソル場を共変微分すると

$$
\begin{cases}
\cdot\,\text{反変成分} \quad \nabla_\nu T^{\mu\lambda} = \partial_\nu T^{\mu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} T^{\rho\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} T^{\mu\rho} \quad (2\text{階反変}\,1\text{階共変混合テンソル成分}) \\
\cdot\,\text{共変成分} \quad \nabla_\nu T_{\mu\lambda} = \partial_\nu T_{\mu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} T_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} T_{\mu\rho} \quad (3\text{階共変テンソル成分}) \\
\cdot\,\text{混合成分} \quad \nabla_\nu T^{\lambda}{}_{\mu} = \partial_\nu T^{\lambda}{}_{\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} T^{\rho}{}_{\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} T^{\lambda}{}_{\rho} \quad (1\text{階反変}\,2\text{階共変混合テンソル成分})
\end{cases}
\tag{6.4.51}
$$

これらの式を眺んでいるとなにか法則性のようなものが見えてくるだろう．具体的に混合成分 $\nabla_\nu T^{\lambda}{}_{\mu}$ を見ると反変の添え字が 1 個だから (6.4.51) の反変成分の式を参考にすると

$$\nabla_\nu T^{\lambda}{}_{\mu} = \partial_\nu T^{\lambda}{}_{\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} T^{\rho}{}_{\mu}$$

とおける．次に共変成分の添え字が 1 個だから (6.4.51) の共変成分の式を参考にすると，これに続いて $-\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} T^{\lambda}{}_{\rho}$ がくる．その結果，トータル

$$\nabla_\nu T^{\lambda}{}_{\mu} = \partial_\nu T^{\lambda}{}_{\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} T^{\rho}{}_{\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} T^{\lambda}{}_{\rho}$$

となるというわけだ．それでは $\nabla_\nu T^{\lambda}{}_{\mu\kappa}$ はどうなるだろうか．

- エミリー：そうね，反変添え字が 1 個，共変添え字が 2 個だから，まず反変部分は

$$\nabla_\nu T^\lambda_{\ \mu\kappa} = \partial_\nu T^\lambda_{\ \mu\kappa} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} T^\rho_{\ \mu\kappa}$$

となり，次に 2 個の共変添え字の部分はこれに続いて $-\Gamma^\rho_{\ \nu\mu} T^\lambda_{\ \rho\kappa} - \Gamma^\rho_{\ \nu\kappa} T^\lambda_{\ \mu\rho}$ がきて，トータル

$$\nabla_\nu T^\lambda_{\ \mu\kappa} = \partial_\nu T^\lambda_{\ \mu\kappa} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} T^\rho_{\ \mu\kappa} - \Gamma^\rho_{\ \nu\mu} T^\lambda_{\ \rho\kappa} - \Gamma^\rho_{\ \nu\kappa} T^\lambda_{\ \mu\rho} \tag{6.4.52}$$

となるわ．

- K 氏：そうだね．ところで共変微分といっても微分なので普通の関数微分の場合と同じルールが成立することを記しておこう．

$$\begin{cases} \cdot\text{和・差} \quad \nabla_\nu (A^\lambda_{\ \mu\kappa} \pm B^\lambda_{\ \mu\kappa}) = \nabla_\nu A^\lambda_{\ \mu\kappa} \pm \nabla_\nu B^\lambda_{\ \mu\kappa} \\ \qquad\qquad \delta (A^\lambda_{\ \mu\kappa} \pm B^\lambda_{\ \mu\kappa}) = \delta A^\lambda_{\ \mu\kappa} + \delta B^\lambda_{\ \mu\kappa} \\ \cdot\text{積} \quad \nabla_\nu (A^\lambda_{\ \mu\kappa} B^\rho_{\ \sigma}) = (\nabla_\nu A^\lambda_{\ \mu\kappa}) B^\rho_{\ \sigma} + A^\lambda_{\ \mu\kappa} (\nabla_\nu B^\rho_{\ \sigma}) \\ \qquad\qquad \delta (A^\lambda_{\ \mu\kappa} B^\rho_{\ \sigma}) = (\delta A^\lambda_{\ \mu\kappa}) B^\rho_{\ \sigma} + A^\lambda_{\ \mu\kappa} \delta B^\rho_{\ \sigma} \\ \cdot\text{縮約} \quad \nabla_\nu (A^\lambda_{\ \mu\kappa} B^\rho_{\ \lambda}) = (\nabla_\nu A^\lambda_{\ \mu\kappa}) B^\rho_{\ \lambda} + A^\lambda_{\ \mu\kappa} (\nabla_\nu B^\rho_{\ \lambda}) \\ \qquad\qquad \delta (A^\lambda_{\ \mu\kappa} B^\rho_{\ \lambda}) = (\delta A^\lambda_{\ \mu\kappa}) B^\rho_{\ \lambda} + A^\lambda_{\ \mu\kappa} (\delta B^\rho_{\ \lambda}) \end{cases} \tag{6.4.53}$$

6.4.5 計量テンソルの共変微分

- K 氏：計量テンソルの共変微分を求めよう．共変成分 g_{ij} を共変微分すると (6.4.51) より

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^\rho_{ki} g_{\rho_j} - \Gamma^\rho_{kj} g_{i\rho} \tag{6.4.54}$$

これは (6.4.6) より 0 となる．すなわち

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{6.4.55}$$

反変成分 g^{ij} の共変微分は

$$g_{ip} g^{jp} = \delta^j_i \tag{6.4.56}$$

を利用する．共変微分すると

$$\nabla_k (g_{ip} g^{jp}) = (\nabla_k g_{ip}) g^{jp} + g_{ip} (\nabla_k g^{jp}) = \nabla_k \delta^j_i \tag{6.4.57}$$

(6.4.51) より

$$\nabla_k \delta^j_i = \partial_k \delta^j_i + \Gamma^j_{\ k\rho} \delta^\rho_i - \Gamma^\rho_{\ ki} \delta^j_\rho = \Gamma^j_{\ k\rho} \delta^\rho_i - \Gamma^\rho_{\ ki} \delta^j_\rho = \Gamma^j_{\ ki} - \Gamma^j_{\ ki} = 0 \tag{6.4.58}$$

したがって

$$g_{ip} (\nabla_k g^{jp}) = 0 \tag{6.4.59}$$

両辺に $g^{\mu p}$ を掛けて p について縮約すると

$$g^{\mu p} g_{ip} (\nabla_k g^{jp}) = \delta^\mu_i \nabla_k g^{jp} = 0, \quad \therefore\ \nabla_k g^{jp} = 0 \tag{6.4.60}$$

すなわち

$$\nabla_k g^{ij} = 0 \tag{6.4.61}$$

となる．

- エミリー：計量テンソルを共変微分すると 0 になるということは，計量テンソルは定数ということなの．

- K氏：そうなんだ．このことは 2 つのベクトルの内積というか，なす角は平行移動によって変化しないし，ベクトルの長さも変わらないということを意味しているんだね．

6.5　発散と回転

6.5.1　発散

- K氏：v^i をベクトルの反変成分とするとき，その共変微分係数 $\nabla_j v^i$ はテンソルで，その縮約 $\nabla_i v^i$ は

$$\nabla_i v^i = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \partial_i v^i + \Gamma^i{}_{ik} v^k \tag{6.5.1}$$

となる．またクリストッフェルの記号 $\Gamma^i{}_{ik}$ は i と j について縮約 $(i, j = 1, 2, 3$ について足し合わす）すると

$$\Gamma^i{}_{ik} = \frac{1}{2} g^{ji}(\partial_i g_{kj} + \partial_k g_{ji} - \partial_j g_{ik}) = \frac{1}{2} g^{ji} \partial_k g_{ji} \tag{6.5.2}$$

となる．計量テンソル g_{ij} の行列式を

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

とおいて．行列式の成分 g_{ij} の余因子を Δ^{ij} とすると，$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ なので

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \Delta^{ij} \qquad \therefore\ \Delta^{ij} = g g^{ij} \tag{6.5.3}$$

を得る．g を微分して余因子展開すると

$$\begin{aligned}
\partial_k g &= \begin{vmatrix} \partial_k g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ \partial_k g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ \partial_k g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & \partial_k g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & \partial_k g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & \partial_k g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \partial_k g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & \partial_k g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & \partial_k g_{33} \end{vmatrix} \\
&= (\partial_k g_{11} \Delta^{11} + \partial_k g_{21} \Delta^{21} + \partial_k g_{31} \Delta^{31}) + (\partial_k g_{12} \Delta^{12} + \partial_k g_{22} \Delta^{22} + \partial_k g_{32} \Delta^{32}) \\
&\quad + (\partial_k g_{13} \Delta^{13} + \partial_k g_{23} \Delta^{23} + \partial_k g_{33} \Delta^{33}) \\
&= (\partial_k g_{11} \Delta^{11} + \partial_k g_{12} \Delta^{12} + \partial_k g_{13} \Delta^{13}) + (\partial_k g_{21} \Delta^{21} + \partial_k g_{22} \Delta^{22} + \partial_k g_{23} \Delta^{23}) \\
&\quad + (\partial_k g_{31} \Delta^{31} + \partial_k g_{32} \Delta^{32} + \partial_k g_{33} \Delta^{33}) \\
&= \partial_k g_{ij} \Delta^{ij} = g g^{ij} \partial_k g_{ij} \\
\therefore \quad & g^{ij} \partial_k g_{ij} = \frac{1}{g} \partial_k g
\end{aligned} \tag{6.5.4}$$

これから

$$\Gamma^i{}_{ik} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \partial_k g = \partial_k \ln \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \sqrt{g} \tag{6.5.5}$$

を得る．(6.5.1) は

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \partial_i v^i + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g}\, \partial_i v^i + \partial_i \sqrt{g} v^i \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g}\, v^i) \\
&\therefore \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g}\, v^i)
\end{aligned} \tag{6.5.6}$$

これが曲線座標系でのベクトル場の発散を表す．

勾配 $\nabla\varphi$ の反変成分は (6.2.16) より $v^i = g^{ij}\partial_j\varphi$ で与えられた．この発散を $\Delta\varphi$ あるいは $\nabla^2\varphi$ とおき，φ のラプラシアンという．ラプラシアンは (6.5.6) より

$$\Delta\varphi = \nabla_i(g^{ij}\partial_j\varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}\,g^{ij}\partial_j\varphi) \tag{6.5.7}$$

となる．

6.5.2 回転

- K氏：ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の共変微分 $\nabla\boldsymbol{v}$ の共変成分 $\nabla_j v_j$ は 2 階共変テンソルだった．このテンソルを使って 2 階反対称テンソル場 W_{ji} を

$$W_{ji} = \nabla_j v_i - \nabla_i v_j = (\partial_j v_i - \Gamma^r{}_{ji} v_r) - (\partial_i v_j - \Gamma^r{}_{ij} v_r) = \partial_j v_i - \partial_i v_j \tag{6.5.8}$$

と定義する．2 階反対対称テンソルには軸性ベクトルが付随することを以前話したね．つまり，2 階反対称テンソルは 3 個の独立成分しか持っていないということだった．天下り的だけど曲線座標系においても 2 階反対称共変テンソル場 W_{ji} には軸性ベクトル場 $\boldsymbol{w}$ が付随し．次の反変成分をもつ．

$$w^r = \frac{1}{2\sqrt{g}}\,\varepsilon_{ijk}W_{jk} \qquad \begin{cases} w^1 = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\,(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) \\ w^2 = -\dfrac{1}{\sqrt{g}}\,(\partial_1 v_3 - \partial_3 v_1) \\ w^3 = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\,(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \end{cases} \tag{6.5.9}$$

w^i はベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の回転 $\boldsymbol{w} = \nabla\times\boldsymbol{v}$ の反変成分だ．

- エミリー：回転成分にはレビチビタの記号が消しあって入っていないけど，これはベクトルが 1 回転して元に戻ってきたとき，座標的に何の変化もないということを意味しているのかしら．

- K氏：そのようなイメージでいいと思うよ．

6.6 曲率テンソル

- K氏：反変ベクトルの共変微分係数は

$$\nabla_j v^r = \frac{\partial v^r}{\partial u^j} + \Gamma^r{}_{ji} v^i \tag{6.6.1}$$

で 2 階混合テンソルの成分だった．これをもう一回違う方向に共変微分することで空間の曲がり具合が分かると考えられる．そこで (6.6.1) を u^k について共変微分しよう．これは混合テンソルの共変微分の公式 (6.4.51) を使えばよいので

$$\nabla_k \nabla_j v^r = \frac{\partial \nabla_j v^r}{\partial u^k} + \Gamma^r{}_{k\rho} \nabla_j v^\rho - \Gamma^\rho{}_{kj} \nabla_\rho v^r \tag{6.6.2}$$

を得る．さらに (6.6.1) を使えば

$$\begin{aligned}\nabla_k \nabla_j v^r &= \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial v^r}{\partial u^j} + \Gamma^r{}_{ji} v^i\right) + \Gamma^r{}_{k\rho}\left(\frac{\partial v^\rho}{\partial u^j} + \Gamma^\rho{}_{ji} v^i\right) - \Gamma^\rho{}_{kj} \nabla_\rho v^r \\ &= \frac{\partial^2 v^r}{\partial u^k \partial u^j} + \frac{\partial \Gamma^r{}_{ji}}{\partial u^k} v^i + \Gamma^r{}_{ji} \frac{\partial v^i}{\partial u^k} + \Gamma^r{}_{k\rho} \frac{\partial v^\rho}{\partial u^j} + \Gamma^r{}_{k\rho} \Gamma^\rho{}_{ji} v^i - \Gamma^\rho{}_{kj} \nabla_\rho v^r\end{aligned} \tag{6.6.3}$$

ここで k と j を入れ替えると

$$\nabla_j \nabla_k v^r = \frac{\partial^2 v^r}{\partial u^j \partial u^k} + \frac{\partial \Gamma^r{}_{ki}}{\partial u^j} v^i + \Gamma^r{}_{ki} \frac{\partial v^i}{\partial u^j} + \Gamma^r{}_{j\rho} \frac{\partial v^\rho}{\partial u^k} + \Gamma^r{}_{j\rho} \Gamma^\rho{}_{ki} v^i - \Gamma^\rho{}_{jk} \nabla_\rho v^r \tag{6.6.4}$$

(6.6.3)−(6.6.4) をとると

$$\nabla_k \nabla_j v^r - \nabla_j \nabla_k v^r = \left(\frac{\partial \Gamma^r{}_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^r{}_{ki}}{\partial u^j} + \Gamma^r{}_{k\rho} \Gamma^\rho{}_{ji} - \Gamma^r{}_{j\rho} \Gamma^\rho{}_{ki}\right) v^i \tag{6.6.5}$$

となる．

$$R_{kji}{}^r = \frac{\partial \Gamma^r{}_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^r{}_{ki}}{\partial u^j} + \Gamma^r{}_{k\rho} \Gamma^\rho{}_{ji} - \Gamma^r{}_{j\rho} \Gamma^\rho{}_{ki} \tag{6.6.6}$$

とおくと，

$$\nabla_k \nabla_j v^r - \nabla_j \nabla_k v^r = R_{kji}{}^r v^i \tag{6.6.7}$$

となる．$R_{kji}{}^r$ は反変 1 階，共変 3 階のテンソルである．このテンソルを曲率テンソルまたはリーマン・クリストッフェルのテンソルという．

詳細は略すがベクトルの共変成分に対しても (6.6.8) と同様な関係式が成り立つ．

$$\nabla_k \nabla_j v_r - \nabla_j \nabla_k v_r = -R_{kjr}{}^i v_i \tag{6.6.8}$$

6.7 直交曲線座標

- K氏：曲線座標系 (u^i) の各点で自然基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が互いに直交しているとき，(u^i) を直交曲線座標系という．極座標とか円柱座標，楕円柱座標等は直交曲線座標の代表的なものだね．計量テンソルは

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = 0 \quad (i \neq j) \tag{6.7.1}$$

となるので，計量テンソルの共変成分の行列は対角行列となり，対角成分は常に正となる．

$$g_{11} = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = |\boldsymbol{e}_1|^2 > 0, \quad g_{22} = |\boldsymbol{e}_2|^2, \quad g_{33} = |\boldsymbol{e}_3|^2 \tag{6.7.2}$$

対角成分が 0 でない行列の逆行列は対角行列になるので計量テンソルの反変成分 g^{ij} も対角行列となり，$(g_{ij})(g^{ij}) = \boldsymbol{I}$ より，対角成分は

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} > 0, \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}} > 0, \quad g^{33} = \frac{1}{g_{33}} > 0 \tag{6.7.3}$$

となる．直交曲線座標系では自然基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の代わりに，各点に正規直交基底ベクトルを設けて議論を進めるのが一般的だ．g_{11}, g_{22}, g_{33} はそれぞれ自然基底の長さの 2 乗となるので

$$g_{11} = h_1^2, \quad g_{22} = h_2^2, \quad g_{33} = h_3^2 \qquad (h_i > 0) \tag{6.7.4}$$

とおいて，自然基底をそれぞれの長さで割った

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3} \tag{6.7.5}$$

を作れば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は互いに垂直な単位ベクトルとなり，空間の各点における正規直交基底とすることができる．ちなみに h_i をスケール因子という．つまり，自然基底の長さを基準長さとした各座標の目盛り幅のようなものだね．

任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ をこの正規直交基底 $\boldsymbol{a}_i$ で展開すれば

$$\boldsymbol{v} = \tilde{v}_1\boldsymbol{a}_1 + \tilde{v}_2\boldsymbol{a}_2 + \tilde{v}_3\boldsymbol{a}_3 \tag{6.7.6}$$

となる．基底 $\boldsymbol{a}_i$ は長さが 1 の正規直交基底ベクトルなので，$\boldsymbol{v}$ 成分 $\tilde{v}_i$ の反変性と共変性の区別はない．自然基底で展開した場合には

$$\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{e}_2 + v^3\boldsymbol{e}_3 = v^1h_1\boldsymbol{a}_1 + v^2h_2\boldsymbol{a}_2 + v^3h_3\boldsymbol{a}_3 = \tilde{v}_1\boldsymbol{a}_1 + \tilde{v}_2\boldsymbol{a}_2 + \tilde{v}_3\boldsymbol{a}_3$$

となるので，ベクトル成分 $\tilde{v}_i$ と反変成分の関係は

$$v^1 = \frac{1}{h_1}\tilde{v}_1, \quad v^2 = \frac{1}{h_2}\tilde{v}_2, \quad v^3 = \frac{1}{h_3}\tilde{v}_3 \tag{6.7.7}$$

となる．$\boldsymbol{v}$ の共変成分 v_i は $v_i = g_{ij}v^j$ で与えられるので

$$v_1 = h_1\tilde{v}_1, \quad v_2 = h_2\tilde{v}_2, \quad v_3 = h_3\tilde{v}_3 \tag{6.7.8}$$

自然基底 $\boldsymbol{e}_i$ の反変基底を $\boldsymbol{e}^i$ とすると

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}^1 + v_2\boldsymbol{e}^2 + v_3\boldsymbol{e}^3 = \tilde{v}_1h_1\boldsymbol{e}^1 + \tilde{v}_2h_2\boldsymbol{e}^2 + \tilde{v}_3h_3\boldsymbol{e}^3 = \tilde{v}_1\boldsymbol{a}_1 + \tilde{v}_2\boldsymbol{a}_2 + \tilde{v}_3\boldsymbol{a}_3 \\ &\therefore \quad \boldsymbol{e}^1 = \frac{1}{h_1}\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{e}^2 = \frac{1}{h_2}\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{e}^3 = \frac{1}{h_3}\boldsymbol{a}_3 \end{aligned} \tag{6.7.9}$$

となる．反変基底 $\boldsymbol{e}^i$ は (5.1.28) の定義を満たしていることを確認して欲しい．

- エミリー：自然基底は互いに直交しているので

$$\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j = \frac{\boldsymbol{a}_i}{h_i} \cdot (h_j\boldsymbol{a}_j) = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \frac{1}{h_ih_j}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta^i_j \tag{6.7.10}$$

となって，反変基底の定義を満たすわ．つまり，各基底の長さが 1 でない場合，ベクトルの成分としては反変成分と共変成分の 2 種類があるということね．ベクトル $\boldsymbol{v}$ の反変成分 $\boldsymbol{v}^i$，共変成分 $\boldsymbol{v}_i$ と正直交基底 $\boldsymbol{a}_i$ を使っ場合の成分 $\tilde{v}_i$ との関係は

$$h_iv^i = \tilde{v}_i = \frac{1}{h_i}v_i \tag{6.7.11}$$

となるわけね．ベクトル $\boldsymbol{v}$ の長さの 2 乗は (6.7.6) より

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2 \tag{6.7.12}$$

これはまた反変成分と共変成分の積の和 $v^i v_i$ で与えられたので計算すると．

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \sqrt{v^1 v_1 + v^2 v_2 + v^3 v_3} = \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2 \tag{6.7.13}$$

となって同じ結果を与えるわね．

6.7.1 勾配・発散・回転

- K氏：直交曲線座標系における勾配を求めてみよう．スカラー場 φ の勾配ベクトル成分は共変ベクトル成分なので

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\boldsymbol{e}^i = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}\boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u^3}\boldsymbol{a}_3 \tag{6.7.14}$$

となる．次に発散は (6.5.6) より

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}v^i) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_1h_2h_3v^1)}{\partial u^1} + \frac{\partial(h_1h_2h_3v^2)}{\partial u^2} + \frac{\partial(h_1h_2h_3v^3)}{\partial u^3}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}v^i) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3\tilde{v}^1)}{\partial u^1} + \frac{\partial(h_1h_3\tilde{v}^2)}{\partial u^2} + \frac{\partial(h_1h_2\tilde{v}^3)}{\partial u^3}\right]\end{aligned} \tag{6.7.15}$$

また，ラプラシアンは (6.7.16) より

$$\begin{aligned}\Delta\varphi =& \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}\,g^{ij}\partial_j\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}\,g^{ii}\partial_i\varphi) \\ =& \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\right) + \left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}\right) + \left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u^3}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.7.16}$$

最後に回転は (6.5.9) より

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{a}_1 & h_2\boldsymbol{a}_2 & h_3\boldsymbol{a}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3} \\ h_1\tilde{v}_1 & h_2\tilde{v}_2 & h_3\tilde{v}_3 \end{vmatrix} \tag{6.7.17}$$

となる．具体的な直交曲線座標系におけるこれらの表式は単なる微分計算だけだからやっておいてください．

以上でベクトル談義全 6 話を終了する．お疲れさま〜．

- エミリー：大変お疲れ様でした．

関連図書

[1] 石原　繁：テンソルー科学技術のためにー　1991, 裳華房

[2] 田代嘉宏：テンソル解析　2001, 裳華房

[3] 安達忠次：ベクトルとテンソル　1976, 培風館

[4] 安達忠次：微分幾何学概説　1997, 培風館

[5] 稲葉三男：行列と行列式　1968, 至文堂